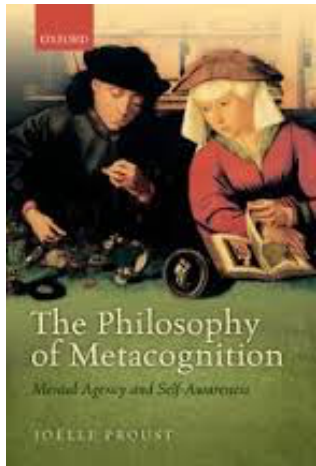


Savoir-faire mathématique
Université de Clermont-Ferrand
14-15 Septembre 2017

Savoir-faire et sensibilité normative en mathématiques

Joëlle Proust Ecole normale supérieure, Paris
<http://joelleproust.org>



Plan de l'exposé

1. Introduction: la dualité apparente de la compréhension mathématique
2. Points de résistance du concept de savoir-faire face aux critiques "intellectualistes"
3. Qu'est-ce qu'une action épistémique?
4. Le SF mathématique est structuré par la sensibilité normative.

1 - Introduction: la dualité apparente de la compréhension mathématique

Anna Sfard, 1994: la compréhension des nombres complexes

- Il y a quelques années, dans une conversation avec un mathématicien, je me suis plainte de la résistance de mes étudiants à l'idée apparemment simple de **nombre complexe**. Le mathématicien a d'abord refusé d'admettre que le sujet pouvait être intrinsèquement difficile. Cette prétendue résistance pourrait être affaire d'enseignant incompetent plutôt que d'étudiants incapables ou de sujet difficile. J'ai insisté et apporté beaucoup d'exemples. Finalement, le mathématicien a semblé abandonner. "Oui, le problème pourrait être un peu plus difficile que ce que je pensais", a-t-il déclaré. Puis, après une pause de réflexion: "Ok, c'est difficile, mais je vous assure que je ferais comprendre l'idée aux étudiants en un rien de temps: **il me suffirait d'écrire les axiomes régissant les nombres complexes et de montrer que le concept est bien défini.**

- Le collègue d'Anna Sfard estime que l'intelligibilité mathématique procède d'une démonstration de cohérence entre des axiomes.
- Dans le même esprit, Sébastien Gandon, dans sa présentation du colloque, indique que "le savoir-faire est rendu inutile par la mise en place de structures théoriques plus générales et plus profondes"

Dualité ?

- le SF mathématique permet de déployer une **activité épistémique d'invention et d'élaboration individuelle.**
- La connaissance déclarative des mathématiques offre une vue d'ensemble **de résultats structurellement reliés.**
 - La CD ne demande pas de capacité d'inventer.
 - Mais de comprendre le sens des formules et de leurs relations démonstratives

Cette dualité est-elle seulement apparente ?

- Hypothèses défendues:
 - Chaque type de compréhension engage une forme différente d'action épistémique, c'est-à-dire des buts et des normes épistémiques différentes.
 - La seule véritable dualité est celle qui distingue **une action épistémique de sa description.**

2 - Points de résistance du concept
de savoir-faire face aux critiques
"intellectualistes"

Savoir-faire: définition

- Knowing how is a disposition, but not a single-track disposition like a reflex or a habit. Its exercises are observances of rules or canons or the applications of criteria, but they are not tandem operations of theoretically avowing maxims and then putting them into practice' (Ryle 1949, 46).
- "Un savoir-faire est une disposition, mais pas une disposition à sens unique comme un réflexe ou une habitude. Son exercice implique l'observance de règles ou de canons ou l'application de critères, **mais ces opérations ne s'accompagnent pas de l'adoption théorique de maximes suivie par leur mise en application.**"

Arguments rylliens en faveur de la reconnaissance du savoir-faire (SF)

- L'absence de recours intérieur à des règles explicites ne nuit pas à l'exercice de la compétence (p. 30).
- La variabilité de la compétence s'applique aussi à la saisie d'une seule et même proposition. Si cette compétence s'appuyait sur d'autres propositions, il s'ensuivrait une régression à l'infini, par exemple: concernant
 - la pertinence du choix d'une règle particulière (p. 31)
 - Les circonstances particulières du contexte de l'application de la règle
 - La planification, qui devrait être précédée d'une autre planification.

Là où Ryle commet une erreur

- **Le cadre théorique du fantôme dans la machine**: les arguments du plan impossible à planifier, et du SF sans préalable interne ont cessé d'être convaincants: comme toute pratique, les savoir faire consistent en hiérarchies de représentations.
 - Tout SF suppose la sélection non consciente, au sein de diverses possibilités alternatives, du modèle prospectif (forward model) permettant d'accomplir l'action en fonction du contexte.
- **L'argument de la variabilité du contexte, par conséquent, ne peut plus être présenté comme un atout exclusif du SF**, car la question de la sélection pertinente touche tout autant le SF que la connaissance déclarative.

Arguments anti-ryliens : Stanley & Williamson (2001), Stanley (2011)

- "Pour savoir comment faire du vélo, il est seulement nécessaire d'avoir accès à [grasp] un moyen de faire du vélo. **Savoir comment faire du vélo implique la connaissance d'une proposition distincte de celle de savoir comment *expliquer comment faire* du vélo.**"
- Comme toutes les attributions de connaissance, les jugements intuitifs sur la vérité ou la fausseté des jugements de savoir-faire sont sensibles non seulement aux composants de la proposition présumée connue, **mais aussi à la façon dont le sujet les pense (son mode de *donation*)** → **rôle crucial des démonstratifs pour faire référence à la manière d'accéder au contenu.**

Objections à S & W

- La conception propositionnelle du savoir-faire s'appuie explicitement sur la possibilité de **décrire** par une attribution déclarative de connaissance ce que l'agent sait comment et quand faire (Proust, 2013).
- Mais cette description ne peut en aucun cas **constituer** le contenu représentationnel d'un savoir-faire:
 1. La description masque la dimension **évaluative** propre au savoir-faire.
 2. Des **heuristiques non-propositionnelles** sont des sources nécessaires d'évaluation (quelle que soit le type de connaissance).
 3. La conscience démonstrative du SF passe par un indexage de tâche qui ne peut être "**saisi**" sans être **activé** par l'action correspondante, ce que ne demande pas le "savoir que".
 4. Le savoir-faire épistémique est présent **en l'absence de pensée propositionnelle** (par exemple: primates, rongeurs)

Perspective proposée sur la dualité SF/CD

La distinction entre SF et CD a six dimensions dont **quatre sont (partiellement) explorées dans la littérature.**

1. **Répertoire cognitif impliqué**
2. **Mise en contexte**
3. **Mode de régulation du raisonnement**
4. **Accès conscient de type projectif**
5. **Pattern normatif**
6. **Fonction**

Pour respecter des contraintes de temps

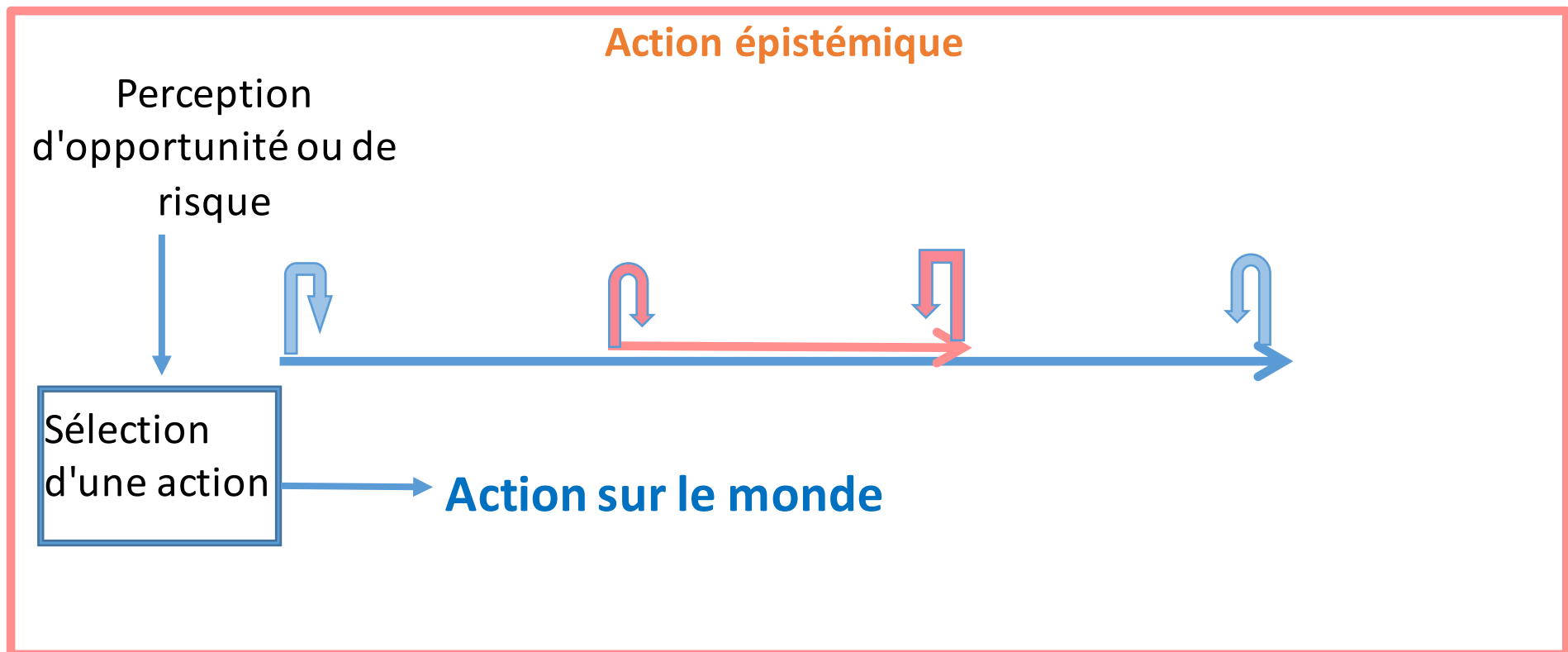
- Ces dimensions ne pourront être examinées une par une.
- Elles seront évoquées en partant de l'hypothèse selon laquelle le savoir-faire doit être pensé dans le cadre de l'agir épistémique.

3 - Qu'est-ce qu'une action épistémique?

Qu'est-ce qu'une action épistémique?

- C'est une action visant l'acquisition, le rappel, la combinaison, la spécification d'informations contribuant à la formation de connaissances (attention perceptive, déduction, généralisation, induction).
- Exemples d'action épistémique:
 - tenter de se rappeler un nom propre, une identité algébrique, etc.
 - Tenter de démontrer un théorème

L'action épistémique est souvent intégrée à l'action sur le monde



Variété des stratégies épistémiques

- **L'opportunité perçue** varie avec les **besoins instrumentaux**: par exemple, se remémorer un nom propre, identifier des espèces de fleurs, l'emplacement de ses clés, vérifier une affirmation douteuse, etc.
- **Chaque but** suppose **la sélection d'un schéma opératoire particulier pour y parvenir** (trouver le meilleur "modèle inverse", étant donné le point d'arrivée souhaité).
- Les buts épistémiques se distinguent par **les normes qui en régissent l'évaluation**: vérité, probabilité, cohérence, pertinence, simplicité, intelligibilité, etc.

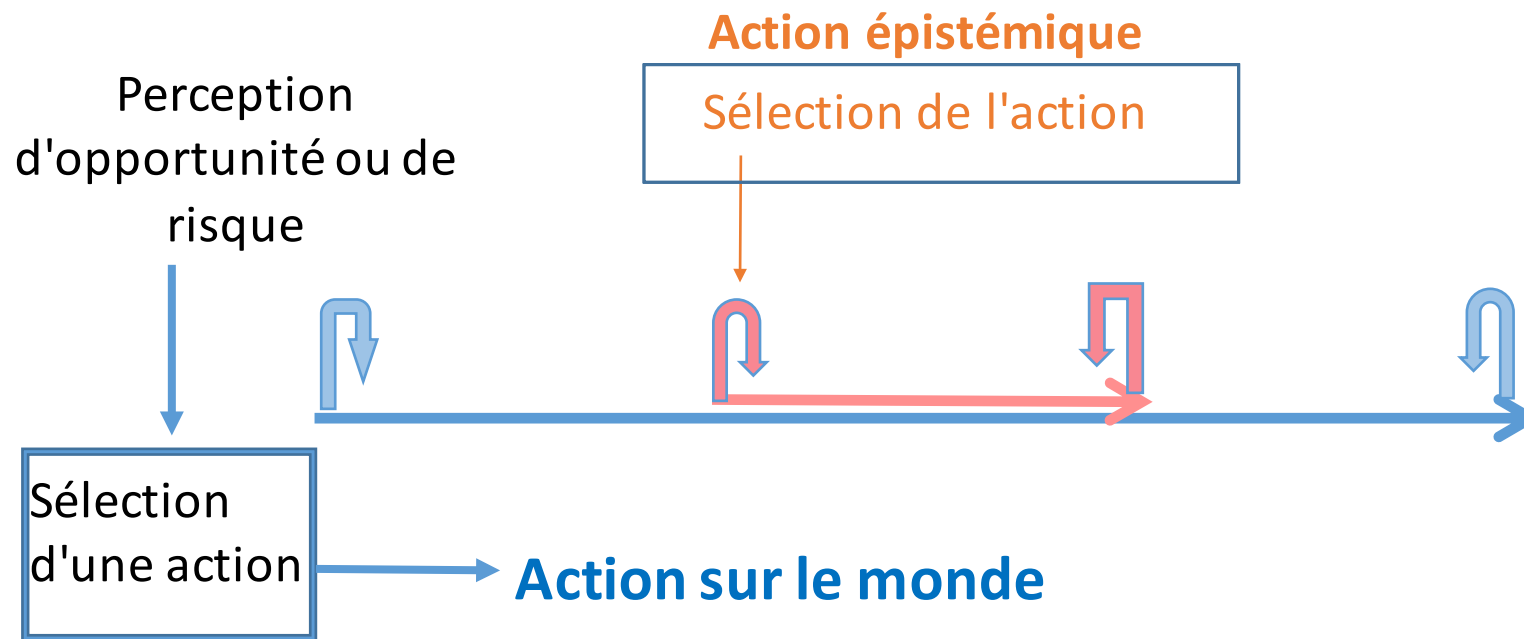
D'où la question

- Comment "sait-on" choisir un but donné et des moyens donnés en fonction du contexte?
 - Parce qu'une procédure particulière se dégage (subpersonnellement) comme celle qui satisfait le mieux les contraintes d'opportunités
 - Parce que les obstacles qui peuvent contextuellement se présenter pourront être identifiés et surmontés

→ Un savoir-faire, par définition, implique

- la sélection rationnelle d'un but étant donné les contraintes présentes **et**
- L'évaluation du progrès de l'action vers le but.

Omniprésence des étapes évaluatives et stratégiques



A quoi font référence les symboles "  " ?

- Ce sont les évaluations commandant les microdécisions nécessaires à l'ajustement de l'action au contexte.
 - Avant l'action: pour la sélectionner (Collins & Koechlin 2012)
 - Pendant l'action et surtout après l'action: pour évaluer les résultats obtenus
- Ces évaluations **ne peuvent être effectuées "off-line", sans agir**, parce qu'elles **exploitent l'information engendrée par l'action**. (Koriat & Ackerman, 2010)

- Ce que l'activité permet d'évaluer/prédire, c'est **la progression vers le but** (Carver & Scheier, 1990)
 - Plus long que prévu: **sentiments noétiques** à **valence** négative, dont **l'intensité** dépend du différentiel attente/observation
Exemple: sentiment d'incompréhension, de confusion
 - Plus rapide que prévu: **sentiments noétiques** à valence positive et intensité qui dépend du différentiel attente/observation
Exemple: sentiment de facilité, sentiment de savoir, ressenti de triomphe cognitif.

Information sur laquelle se fondent les évaluations

- Les heuristiques prédictives dépendent d'indices causalement pertinents pour le succès ou l'échec d'une tâche:
 - La familiarité d'une question
 - La rapidité d'accès à l'information associée à la cible
 - la rapidité du recrutement neuronal par la tâche,
 - la consistance représentationnelle (le nombre de représentations alternatives favorisant des décisions incompatibles)
 - la dynamique de convergence neuronale vers une solution
 - L'association à des indices prédictifs somatiques (proprioceptifs, respiratoires, circulatoires, endocriniens, cardiaques).
- Ces indices évaluent les contenus épistémiques de manière indirecte, à travers la manière dont ces contenus sont traités par l'esprit
- Ces indices sont **fonctionnellement** équivalents à **des évaluations normatives, même si la théorisation normative n'existe pas à leur niveau.**

Structure représentationnelle de l'évaluation

- Normativité à gradient: confiance probabiliste, plus ou moins élevée dans la correction
- Cette structure à gradient concerne aussi l'évaluation de l'opportunité d'agir.
- Mais une fois l'opportunité évaluée, le but est adopté de manière inconditionnelle.

Action épistémique simple ou complexe

L' action épistémique peut être

- Atomique: par exemple retrouver un nom propre, une identité remarquable.
- ou hiérarchisée: résoudre un problème suppose la résolution consciente ou inconsciente de multiples sous-problèmes, le rappel de résultats existants, etc.

Action Cognitive	Evaluation prédictive	Evaluation Rétrodictive
Reconnaissance perceptive	Sentiment de familiarité	Sentiment de confiance
Rappel mémoriel	Sentiment de savoir	Sentiment de confiance
Délibération	Sentiment de facilité, de difficulté, de compétence	Sentiment d'être dans le vrai, sentiment d'erreur
Accéder à un mot du répertoire	Sentiment d'avoir le mot sur le bout de la langue	Sentiment de correction ou d'incorrection du rappel
Planification	Sentiment de facilité, de difficulté	Sentiment de cohérence, de pertinence, d'exhaustivité

4. Le SF mathématique est structuré par la sensibilité normative.

Les actions mathématiques ressemblent aux autres actions épistémiques par

- la structure de l'évaluation:
 - Prédictive: sens de l'effort, sens d'une dynamique de progrès vers le but
 - Rétrodictive: sens de vérité/cohérence/validité/nouveauté/économie/perfectibilité de la preuve, sens d'avoir commis une erreur
- Les sentiments noétiques spécialisés qui rendent les évaluations conscientes

Se distinguent des autres actions épistémiques par

- leurs buts spécialisés multiples
- Les schémas opératoires et raisonnements impliqués, qui font l'objet d'un apprentissage initial puis sont étendus par l'activité individuelle.
- L'imagerie de guidage exploratoire, qui est individuelle.

L'imagerie de guidage: Exemple de Jacques Hadamard (1949)

- Tout argument mathématique, si compliqué qu'il soit, doit m'apparaître comme une chose unique. Je ne pense pas l'avoir compris tant que je ne réussis pas à le saisir dans une idée globale. (p. 65)
- Cette idée globale se présente comme une imagerie vague, qui peut se comparer à la "physionomie" du concept ou de l'argument.
- L'imagerie d'un concept donné est hautement idiosyncratique. Par exemple, pour Hadamard, la somme d'un nombre infini de termes est représentée par "l'image d'un ruban plus épais ou plus sombre aux endroits où se trouvent les termes importants".(p. 78)

Pourquoi y-a-t-il plusieurs types de compréhension mathématique (Sfard, 1991)?

- Les pratiques qui relèvent de la mathématique sont d'une extrême diversité. L'un des moyens de les distinguer consiste à examiner les normes constitutives de ces pratiques.
- Les heuristiques le plus souvent évoquées sont centrées sur la fluence, c'est-à-dire la rapidité de traitement, qui fait apparaître un raisonnement comme vrai, cohérent, ou trouver "beau" un résultat.

Tout **mécanisme** cognitif a été sélectionné pour sa **fonction** représentationnelle

- **Hypothèse fonctionnelle:** la dimension informationnelle dont dépend l'atteinte d'un but épistémique est celle qui fait l'objet d'une évaluation (ex: la validité perceptive, ou la validité mémorielle)
 - L'évaluation propre au but détermine les indices choisis (mécanismes) pour évaluer un type d'action
- Le cerveau peut sélectionner les indices prédictifs de succès épistémique relatifs à chaque dimension informationnelle impliquée dans une action.

Etape	Sentiment	Mécanisme	Fonction math
I	Familiarité	Fluence de l'activation perceptive (onset)	Indice de sélection d'une procédure
I	Simplicité	Fluence de la reconnaissance perceptive (dynamique)	Indice auxiliaire de validité d'une formule ou d'une dérivation simple
II	Cohérence	Fluence déductive	Indice de validité d'une dérivation complexe
III	Informativité	Extension de la dynamique neuronale	Indice d'intérêt cognitif
IV	Pertinence	Optimisation du rapport entre fluence déductive et informativité	Sélection de l'action
V	Beauté	Optimisation du rapport entre fluence perceptive et informativité	Indice de validité du résultat

Hiérarchie d'acquisition des normes dans une pratique épistémique

(Proust, en préparation)

Le SF mathématique est une dynamique de sensibilisation à des normes implicites

Etape I

La fluence d'une identité algébrique ou de l'arithmétique élémentaire a pour origine la mémorisation de suites de symboles avec leurs associations les plus fréquentes: familiarité perceptive puis opératoire (Reder & Ritter, 1992).

Etape II Acquisition de structures déductives et sensibilité à la cohérence.

Etapes III et IV: Autonomie croissante dans la sélection des méthodes de preuve

Etape V: Capacité de représentation synoptique des méthodes et des résultats.

Conclusion

Retour à la pédagogie de $i = \sqrt{-1}$

- Avec les nombres complexes, nous perdons la relation d'ordre: nous sommes très loin du nombre-mesure (Félix, 1966, p. 285).
- "naturellement $\sqrt{-1}$ n'existe pas, les nombres écrits sont seulement 'imaginaires'. Mais **tout s'arrange car $\sqrt{-1}$ disparaît**. (...) Ce qui nous importe, c'est le succès d'une méthode qui introduit le symbole imaginaire au cours du calcul de façon qu'il disparaisse à la fin" (p.288)
- "L'introduction de ce seul symbole i assure l'existence de trois racines pour l'équation de troisième degré et de quatre pour l'équation de quatrième degré. Il parut alors **possible, probable**, que l'introduction de ce seul symbole assure **l'existence de n racines**, réelles ou imaginaires, simples ou multiples, de toute équation de degré n ". (289)

Anna Sfard et son collègue mathématicien

- Ont chacun en tête une forme différente d'action mathématique à proposer aux élèves étant donné l'arrière-plan de leur sensibilité normative.
- Anna Sfard est persuadée qu'il faut présenter les nombres complexes **au stade II**.
- Son collègue voit la difficulté à surmonter au stade II **l'incohérence apparente des nombres complexes**.
- Il propose donc d'aller directement **au stade métamathématique IV**.
- Anna Sfard a sans doute raison de dire qu'on ne peut pas brûler les étapes.

Solution: prévenir les élèves que la compréhension des nombres complexes finira par arriver?

**Merci de votre
attention**

**Cette présentation peut être téléchargée sur
<http://joelleproust.org>**

Connaissance déclarative/procédurale

Variables principales	Know that	Know how
Répertoire cognitif impliqué	Constitué par des propositions	Constitué par des modèles opératoires régulés
Régulation du raisonnement	Par des propriétés syntaxiques? sémantiques? par les processus d'écriture/lecture?	Par des heuristiques portant sur les propriétés des processus
Mise en contexte	Par les démonstratifs	Par indexage sensoriel + feedback de l'activité
Accès conscient	Systèmes réglés de symboles verbaux ou écrits partagés	Imagerie individuelle de guidage sentiments noétiques
Pattern normatif	Bivalent	À gradient
Fonction	Justification	Résolution de problèmes